www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION — CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

M A T H E M A T I Q U E S I (Option générale)

DUREE 4 HEURES - COEFFICIENT : 5

L'EPREUVE COMPORTE UN EXERCICE ET UN PROBLEME

EXERCICE

Une urne comporte b boules blanches et r boules rouges.
On tire les boules une à une,

en remettant la boule après tirage si celle-ci est rouge et en ne la remettant pas si celle-ci est blanche.

1°) Calculer la probabilité de tirer exactement une blanche en n tirages.

2°) Calculer la probabilité de tirer au moins une blanche en n tirages.

3°) Sachant qu'en n tirages on a tiré **exactement** une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule blanche ait été tirée en dernier?

PROBLEME

PARTIE I. PRELIMINAIRES ET RAPPELS

Cette partie ne comporte que deux questions.

A.
La restriction de la fonction tan à $]-\pi/2, \pi/2[$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque, notée Arctan, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

La fonction Arctan est *accessible* sur les calculatrices comme fonction inverse de la fonction tan.

On veillera à utiliser les radians.

1°) Montrer que Arctan est dérivable et que la fonction dérivée est la fonction :

$$x \longrightarrow 1/(1+x^2)$$ lire : $\frac{1}{1+x^2}$

2) Etablir que : $\forall x>0$, $\text{Arctan } x + \text{Arctan } 1/x = \pi/2$

B.
On admettra le résultat suivant :

Si f est une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et si :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L, \quad \text{alors} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

et ceci est valable avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Tournez la page S.V.P.

C .
On obtient une valeur approchée de l'intégrale de f sur [a, b] par la méthode des trapèzes à l'ordre n, en posant :

pour $i \in [0,n]$ $x_i = a + i(b-a)/n$

et en prenant comme valeur approchée de l'intégrale :

$$\frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

L'objet du problème est l'étude pour q réel strictement positif de la fonction f_q définie par :

$$f_q(x) = \int_0^x \frac{t^2-1}{(t^2+1)^q}\,dt$$

On notera (C_q) la représentation graphique de la fonction f_q.

PARTIE II : ETUDE GENERALE

1°) Quel est l'ensemble de définition de f_q ?
Etudier la parité de f_q.

2°) Etudier le sens de variation de f_q.

3°) Quel est, selon les valeurs de q, le nombre de points d'inflexion de la représentation graphique.

4°) Pour $q \neq 1$ étudier la forme de branche infinie de (C_q) lorsque x tend vers $(+\infty)$.

5°) Déduire de ce qui précède l'allure -sous forme d'un schéma rapide - de la partie de (C_q) correspondant à $x \geq 0$, pour :

$q \in]0, 1[$
$q \in]1, 3/2[$
$q \in]3/2, +\infty[$

PARTIE III : ETUDE DANS LE CAS q = 1.

1°) En remarquant que : $t^2-1 = t^2+1-2$, donner l'expression de $f_1(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

2°) Montrer que (C_1) admet, quand x tend vers $(+\infty)$, une asymptote que l'on déterminera.

3°) Montrer qu'il existe un point unique A, d'abscisse strictement positive α , intersection de l'axe Ox et de (C_1), et que $\sqrt{3} < \alpha < 3$.

4°) On pose $g(x) = 2\,\mathrm{Arctg}\,x$ et l'on définit une suite (x_n) par :

$$x_0 = 2.37 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]\sqrt{3}, 3[$

TSVP

5°) Etablir que pour $x \in]\sqrt{3}, 3[$, $\quad 0 < g'(x) < 1/2$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$$

6°)

a) En conclure que la suite (x_n) converge vers α.

b) Calculer un entier n, que l'on choisira le plus petit possible, tel que :

$$|x_n - \alpha| \leq 10^{-2}.$$

On pourra remarquer, en le justifiant rapidement, que $|x_0 - \alpha| < 0.64$.

c) Calculer alors, une valeur approchée à 10^{-2} près, de α.

7°) Tracer la partie de (C_1) correspondant à $x \geq 0$, avec précision sur une feuille de papier millimétrée. (unité : 3 cm)

PARTIE IV : ETUDE DU CAS OU q = 3/2

Dans cette question on pose $h(t) = \dfrac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^{3/2}}$ et, pour simplifier,

lire $\dfrac{t^2-1}{(t^2+1)^{3/2}}$

$$f(x) = f_{3/2}(x)$$

1°) Calculer pour i entier, variant de 0 à 34, les valeurs de h(i/10);

Les résultats seront présentés sous forme d'un tableau le plus lisible possible.

2°) En appliquant la méthode des trapèzes à h sur [0, 1] pour n =10, donner une valeur approchée de f(1).

3°) En utilisant le 1°) et la méthode des trapèzes, d'une manière que l'on précisera, donner des valeurs approchées de f(3.3) et f(3.4).

Que peut-on en conclure?

4°) Tracer avec un maximum de soin, sur la même feuille que (C1), la partie de courbe $(C_{3/2})$ correspondant à $x \geq 0$. (unité 3 cm)

lire $C_{\frac{3}{2}}$

==========

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail